

ביה"ס למדעי המחשב ומתמטיקה. תשס"ה, 31.08.2005
 מבנים אלגבריים. סמסטר ב', מועד ב'.
 שם המרצה: פרופ' מ. מוזיצ'וק.
 משך המבחן: 2.5 שעות.

אפשר להשתמש רק במחשיבון ובדפי עזר המצורפים לטופס הבחינה.

חלק א': בחלק זה יש לכתוב במחברת תשובה מלאה על כל אחת מהשאלות.

1. 14 נקודות.

יהי $n \geq 2$ מספר טבעי כלשהו.

א. הוכח שהאיבר $[n-1]_n$ שייך לחבורה $(Z_n, +)$.

ב. הוכח שהסדר של $[n-1]_n$ בחבורה $(Z_n, +)$ שווה ל-2.

2. 14 נקודות

יהי $(R, +, \cdot)$ חוג כלשהו. הוכח שקבוצה R^* של כל האיברים ההפיכים היא חבורה ביחס לפעולת כפל.

3. 14 נקודות

הוכח שלכל שני פולינומים $f(x), g(x) \in F[x], g(x) \neq 0(x)$ מתקיים $\text{Div}(f(x), g(x)) = \text{Div}(g(x), r(x))$ אשר $r(x)$ הוא שארית של חילוק $f(x)$ ב- $g(x)$.

4. 14 נקודות

תהי G חבורה כלשהי עם פעולה בינארית \cdot . נבחר איבר $a \in G$ ונגדיר פעולה חדשה $x * y = x \cdot a \cdot y$. הוכח או הפרך
 א. פעולה $*$ היא פעולה אסוציאטיבית.
 ב. קיים איבר-היחידה ביחס ל- $*$.
 ג. G חבורה ביחס ל- $*$.

חלק ב': יש לענות על 5 שאלות. תשובות לחלק זה ייבדקו רק בטופס הבחינה.

5. 10 נקודות.

שתי תמורות של הקבוצה $Z_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ מוגדרות ע"י הנוסחאות הבאות:

$$f^{-1} = (0,5,3,1)(2,4,6), g(x) = \begin{cases} \frac{5x+3}{2x+5}, & x \neq 1 \\ 6, & x = 1 \end{cases}, x \in Z_7.$$

	א. חשב את gf^2 :
	ב. פרק את gf^2 למכפלה של מחזורים זרים:
	ב. מצא את הסדר של gf^2 :
	ג. פרק את gf^2 למכפלה של חילופים:

6. 10 נקודות.

חשב את המחלק המשותף הגדול ביותר של הפולינומים הבאים:

$$a(x) = x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x], b(x) = x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

$$\gcd(a(x), b(x)) =$$

7. 10 נקודות.

מצא את פתרון פרטי של המשוואה $323x + 221y = 34$ בשלמים.

$$x =$$

$$y =$$

10.8 נקודות.

נתונה חבורה סימטרית S_4 .

רשום את כל המחלקות ימניות שונות של S_4 לפי תת-החבורה

$$H = \{id, (1,2)(4,3), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

10.9 נקודות.

נתונה חבורת מטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z}_3^*, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}$. רשום את כל האברים של החבורה ומול כל איבר רשום את הסדר שלו.

בהצלחה!